

CARLOS L. AYALA
JOSÉ LUIS GALVE
LUIS MOZAS
MANUEL TRALLERO

la enseñanza y el aprendizaje
de las
Matemáticas Elementales



pues...

¡CLARO!



Programa de Estrategias de Resolución de Problemas
y Refuerzo de las Operaciones Básicas



ÍNDICE

© All rights reserved. Dr. D.S.

Dr. D. S. Ramesh Babu

PARTE I

Aprendizaje y desarrollo

1. Introducción	17
1.1. El enfoque piagetiano	18
1.2. El modelo de aprendizaje acumulativo de Gagné	18
1.3. El enfoque de Bruner	19
1.4. El enfoque del procesamiento de la información	19
2. Las Matemáticas en el currículo de la Educación Infantil y Primaria	23
2.1. El conocimiento lógico-matemático en Educación Infantil	23
2.2. Las Matemáticas en Educación Primaria	24
3. El desarrollo del conocimiento matemático	27
3.1. En la etapa de Educación Infantil	27
3.2. En la etapa de Educación Primaria	29
3.3. Factores implicados en el desarrollo lógico-matemático	30
4. Estrategias en el aprendizaje de las Matemáticas	35
4.1. Estrategias generales de aprendizaje	35
4.2. El aprendizaje de estrategias y las estrategias en el aprendizaje	38
4.3. Procedimientos y técnicas específicos	40
4.4. Estrategias en Educación Infantil	41
4.5. Estrategias en Educación Primaria	42
5. Ámbitos del conocimiento matemático	47
5.1. El pensamiento lógico	47
5.2. La numeración	48
5.3. Las operaciones aritméticas	49
5.3.1. Suma y resta	53
a) Estrategias infantiles para la suma y la resta	53
b) Errores infantiles en la suma y la resta	57

5.3.2.	Multiplicación y división	58
5.4.	La resolución de problemas aritméticos	60
5.4.1.	Problemas y ejercicios	61
5.4.2.	Variables lingüísticas en la resolución de problemas	63
5.4.3.	Clasificación de los problemas de suma y resta	65
a)	Dificultad relativa de los problemas de suma y resta	70
b)	Estrategias en la resolución de problemas de suma y resta	71
5.4.4.	Clasificación de los problemas de multiplicación y división	72
a)	Estrategias infantiles en la resolución de problemas de multiplicación y división	75
5.4.5.	Fases en la resolución de problemas	77
5.4.6.	El conocimiento implicado en la resolución de problemas	80
a)	La representación de problemas	82
b)	Los modelos intuitivos de las operaciones	82
5.5.	La geometría y el conocimiento del espacio	83
5.6.	La medida	85
6.	Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas	89
6.1.	El concepto de dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas	89
6.2.	Causas y factores que intervienen en las dificultades de aprendizaje de las Matemáticas	89
6.2.1.	El lenguaje matemático	90
6.2.2.	Variables instruccionales	90
6.2.3.	Factores neurológicos	91
6.2.4.	Procesos cognitivos y errores en Matemáticas	92
6.2.5.	Estrategias cognitivas y metacognitivas	93
6.2.6.	Actitudes	93
6.2.7.	Diferencias en el rendimiento matemático en virtud del sexo ..	94

PARTE II

Enseñanza e intervención

7.	Sugerencias generales sobre la enseñanza de las Matemáticas	99
7.1.	Sugerencias en los primeros cursos para la enseñanza de las Matemáticas ..	99
7.2.	Promoviendo el cambio en el aprendizaje de las Matemáticas	101
7.3.	La enseñanza de estrategias en el aprendizaje de las Matemáticas	102
7.3.1.	Principios y métodos de enseñanza	102
7.3.2.	La enseñanza de heurísticos	103
7.3.3.	El papel del profesor y de los alumnos	106
8.	La enseñanza de los distintos contenidos matemáticos	109
8.1.	La enseñanza del pensamiento lógico	109
8.1.1.	Conservación	110

8.1.2. Correspondencia	110
8.1.3. Clasificaciones	110
8.1.4. Seriaciones	111
8.2. La enseñanza de la numeración	111
8.3. La enseñanza de las operaciones aritméticas	113
8.3.1. La enseñanza de la suma y la resta	113
8.3.2. La enseñanza de las tablas de multiplicar	114
8.3.3. Algunas cuestiones sobre didáctica de la aritmética elemental	114
8.3.4. Estimación y cálculo mental	117
a) Cálculo mental	117
b) Estimación	117
8.4. La enseñanza de la resolución de problemas	118
8.4.1. Enseñar a representarse problemas aritméticos	119
a) Representación de los problemas de suma y resta	120
b) Representación de los problemas de multiplicación y división	121
8.4.2. Enseñar las fases de la resolución de problemas	122
8.5. La enseñanza de la geometría	123
8.5.1. Situación en el espacio	123
8.5.2. Conocimiento de formas geométricas	124
8.6. La enseñanza de la medida. Fases en la enseñanza de la medida	124
9. Modelos y métodos de enseñanza	129
9.1. En Educación Infantil	129
9.2. En Educación Primaria	130
9.3. Métodos de enseñanza y características de los alumnos	131
9.4. El aprendizaje cooperativo	132
10. Materiales para la enseñanza de las Matemáticas	135
11. Intervención en las dificultades de aprendizaje de las Matemáticas	139
Los programas de desarrollo individual y las adaptaciones curriculares	141

PARTE III

Programa de estrategias de resolución de problemas y refuerzo de las operaciones básicas

12. Introducción al programa ¡PUES CLARO!	147
13. Fundamentación teórica	153
14. Objetivos y contenidos del programa	165
14.1. Objetivos de programa	166
14.2. Contenidos de programa	166

15. Tipos de actividades	171
15.1. Nociones básicas	171
15.2. Seriaciones	176
15.3. Operaciones aritméticas	182
15.4. Estrategias de resolución de problemas	195
15.5. Razonamiento lógico con componentes lúdicos	242
15.6. Operaciones con unidades del sistema métrico: longitud, masa, capacidad, superficie y volumen	246
15.7. Operaciones con el sistema monetario	250
15.8. Operaciones con unidades de tiempo	251
15.9. Ejercicios de autorrección y componentes lúdicos	253
16. Secuenciación de las operaciones aritméticas	259
17. Secuenciación de los problemas	271
18. Secuenciación del resto de actividades	281
19. Estructura secuencial de cada cuaderno	293
20. Propuestas metodológicas	303
21. Bibliografía	309

PARTE I

Aprendizaje y desarrollo

Dr. D. S. Ramesh Babu

INTRODUCCIÓN

Dr. D. S. Ramesh Babu

1. Introducción

Las Matemáticas son un medio de representar las relaciones que se establecen en la realidad, relaciones sometidas a las leyes de la lógica y que pueden, en muchos casos, ser cuantificadas. El conocimiento matemático pretende, al menos en parte, caracterizar el orden que percibimos en el mundo (Baroody, 1988).

Dicho conocimiento, a diferencia del conocimiento físico y del conocimiento social (los cuales dependen de fuentes *externas* al sujeto, sean éstas las características observables de los objetos o las normas y convenciones transmitidas por otros miembros de la sociedad), proviene -si aceptamos una óptica piagetiana- de una *abstracción reflexiva* que el sujeto realiza discriminando atributos en la realidad y comparándolos con otros (Cascallana, 1988; Kamii, 1986): una pelota es *grande* o *pequeña* en relación con otras; un conjunto tiene *mayor*, *igual* o *menor* número de elementos que otro, independientemente del tipo de elementos que incluyan; etc. Por este motivo, la mayor parte del conocimiento matemático (y decimos *la mayor parte*, porque no podemos negar la enorme influencia de la transmisión cultural de los conocimientos) debe ser construido por el sujeto, siendo insuficiente la mera transmisión verbal.

De una u otra forma, todos utilizamos las Matemáticas en nuestra vida cotidiana (Lave, 1991). Son un poderoso medio de comunicación que contribuye al aprendizaje en otros campos del conocimiento así como al desarrollo del pensamiento lógico y de la precisión y visión espacial. No es extraño, pues, que exista un consenso general sobre su importancia (Informe Cockcroft, 1985).

Podemos encontrar en Decroly y Montessori los primeros intentos de desarrollar un método nuevo para la enseñanza de las Matemáticas (Fernández, Llopis y Pablo, 1985). Ambos crearon una metodología basada en la manipulación activa, con el objetivo de educar los sentidos y mejorar la coordinación psicomotriz, el lenguaje y otras funciones mentales.

En el último medio siglo, se ha fundamentado dicha enseñanza en una serie de enfoques teóricos de base psicopedagógica (Company y otros, 1988; Llinares, 1994; Macnab y Cummine, 1992).

1.1. EL ENFOQUE PIAGETIANO

Piaget pretendía dar cuenta del desarrollo infantil, incluido el desarrollo lógico-matemático.

Para este autor, la inteligencia se desarrolla mediante un proceso dinámico de equilibración entre dos procesos contrarios:

- La *asimilación*, que consiste en la integración de nueva información en los esquemas cognitivos del sujeto.
- La *acomodación*, que implica la reestructuración de los esquemas cognitivos existentes para poder incorporar nueva información que no encaja en los mismos.

El desarrollo intelectual se caracterizaría por la posesión o ausencia de ciertas operaciones, entendidas como acciones mentales realizadas sobre el entorno.

Sin embargo, se ha cuestionado que la teoría de Piaget, que es una teoría del desarrollo, pueda orientar la enseñanza (Gómez-Granell y Fraile, 1993); las tareas propuestas en sus investigaciones (conservación, clasificación, etc.) no tienen por qué formar parte del currículo escolar, en tanto que no hay razones para esperar que la práctica en las mismas facilite el aprendizaje de las Matemáticas (Company y otros, 1988; Resnick y Ford, 1990).

1.2. EL MODELO DE APRENDIZAJE ACUMULATIVO DE GAGNÉ

Este autor pretendía ayudar al educador a identificar los objetivos que los alumnos deben alcanzar en cualquier área, organizándolos jerárquicamente.

Hay dos tipos de análisis, derivados de este modelo, que resultan de particular interés para el diseño instruccional:

- Para dominar ciertos objetivos (aquellos que consisten en conductas que se realizan ordenadamente, como es el caso del cálculo), deben aprenderse determinadas secuencias. Podríamos alcanzar dichos objetivos si enseñamos el *procedimiento que se ha de seguir*.
- Las tareas más complejas están compuestas también, por lo común, por conjuntos de destrezas ordenadas jerárquicamente e interrelacionadas entre sí (*jerarquías de aprendizaje*). Así pues, el aprendizaje de dichas tareas se favorecería descomponiéndolas en sus componentes y enseñando poco a poco estas destrezas sucesivamente más prolijas. Cada tarea puede, a su vez, descomponerse en nuevas subtareas.

La enseñanza procedería a la inversa: desde las habilidades más elementales, se avanzaría, siguiendo la jerarquía establecida, hasta la consecución de la habilidad que permita realizar la tarea objetivo (Llinares, 1994).

Como vemos, este análisis de tareas conduce a contemplar el aprendizaje como la sucesiva adquisición de conductas cada vez más complejas. Sin embargo, no está claro que todo

el aprendizaje matemático pueda subdividirse jerárquicamente, como tampoco se entiende cómo la adquisición de habilidades más simples permite dominar destrezas de orden superior, tales como las implicadas en la resolución de problemas (Llinares, 1994).

No obstante, la noción de *jerarquías de aprendizaje* puede todavía constituir una buena guía para el profesor, en tanto que orienta los cursos de acción y la selección de los subobjetivos que puede plantearse cuando un concepto o destreza son difíciles de aprender para sus alumnos (Llinares, 1994; Orton, 1990; Resnick y Ford, 1990).

1.3. EL ENFOQUE DE BRUNER

Según Bruner, la manera en que se presenta (y representa) el contenido ejerce una enorme importancia en la adquisición de conceptos y en la resolución de problemas. Para este autor, hay tres maneras de representar el conocimiento:

- *Enactiva* (por medio de la acción). Sería la forma adecuada de mostrar aquellas nociones que son difíciles de enseñar mediante símbolos o diagramas y necesitan de la acción física y directa sobre el entorno.
- *Icónica*. Depende de la organización visual y del uso de imágenes o dibujos.
- *Simbólica*. Implica el uso de un lenguaje, es decir, de un sistema arbitrario sin analogías con los objetos representados.

Para Bruner, estos modos de representación se suceden evolutivamente, y la enseñanza debe ayudar a los niños a trasladarse de uno a otro.

Algunos autores han tratado de reformular estos tres tipos de representación, señalando la importancia que para la asimilación de los conceptos tiene, no sólo la traslación *lineal* de un modo a otro (de la manipulativa a la figurativa, y de ésta a la simbólica), sino también la traslación dentro de un mismo modo de representación (Llinares, 1994): por ejemplo, aunque es relativamente fácil ilustrar fracciones como $2/3$ y $5/4$ mediante dobleces en un folio (representación *enactiva*), es más complicado en el caso de la suma de ambas, para lo cual es más operativo utilizar fichas (lo cual también es una representación *enactiva*).

1.4. EL ENFOQUE DEL PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Las teorías de procesamiento de la información se interesaron por las estructuras del sistema de procesamiento humano (es decir, por los *almacenes* de memoria) y por las fases del mismo (atención, codificación, almacenamiento y recuperación).

Representaron un cambio en los objetivos educativos, porque enfatizaban que debemos enseñar, no sólo conocimientos, sino también los procesos que se deben seguir para adquirirlos (volveremos a ello cuando tratemos de las *estrategias de aprendizaje*).

Como hemos señalado, en paralelo al énfasis en los procesos, los distintos autores se interesaban también por las estructuras de conocimiento, esto es, por la forma en que éste se

encuentra organizado en el sistema cognitivo del sujeto, surgiendo así términos como los de *esquemas*, *guiones*, *scripts*, *modelos mentales*, etc.

Los *sistemas de notación* (es decir, las representaciones simbólicas externas) ayudarían tanto a configurar y apoyar las representaciones internas de las nociones matemáticas, como a comunicar la información y las ideas entre unos individuos y otros pertenecientes a la misma cultura (Llinares, 1994).

Este conjunto de circunstancias hace que, hoy en día, se preste una gran atención a los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las Matemáticas (Armendáriz, Azcárate y Deulofeu, 1993), al conocimiento previo que subyace a las dificultades que muchos niños presentan y al uso de estrategias cognitivas y metacognitivas (Schoenfeld, 1987).

La teoría cognitiva ha formulado cuatro modelos de particular importancia para este campo (Mayer, 1986a):

- *Modelos de comprensión*, que analizan cómo se traducen los enunciados de un problema en representaciones internas.
- *Modelos de esquemas*, que describen el modo de seleccionar e integrar la información en representaciones coherentes.
- *Modelos de procesos*, que identifican los pasos que da una persona para resolver una operación cognitiva bien definida (por ejemplo, una división).
- *Modelos de estrategias*, que estudian la forma de escoger, controlar y alcanzar las metas en la resolución de actividades cognitivas complejas (por ejemplo, un problema de geometría).

En la actualidad, se ha operado un cambio en la didáctica de las Matemáticas de extraordinario interés: se estudia la interacción que se produce en el aula, se analizan las concepciones previas y las estrategias infantiles, se valora el uso del conocimiento matemático en situaciones reales y se concibe el aprendizaje como el resultado de un proceso de construcción social (Gómez-Granell y Fraile, 1993).



El presente manual ofrece una revisión teórica de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, al mismo tiempo que sirve de fundamento para **¡PUES CLARO!** Programa de estrategias de resolución de problemas y refuerzo de las operaciones básicas, del cual recibe su nombre.

Se compone de tres partes diferenciadas:

I. Aprendizaje y desarrollo: Se analizan los principales enfoques del aprendizaje de las Matemáticas, su localización en el currículo de Educación Primaria, las estrategias de aprendizaje y su aplicación a la resolución de problemas, etc. También se analiza el concepto de dificultades de aprendizaje, sus causas y posibles líneas de intervención.

II. Se desarrollan sugerencias para la enseñanza de las Matemáticas.

III. Fundamentación y estructuración del Programa **¡PUES CLARO!**

Dicho programa se apoya en las siguientes líneas básicas:

- Se aborda el aprendizaje de contenidos y procedimientos de forma jerárquica, a partir de los componentes que constituyen cada uno de ellos.
- Se sigue una secuencia de presentación por el profesor y de representación de los contenidos por los alumnos: *enactiva* (a través de la acción), *icónica* (tanto a través de la organización visual como del uso de imágenes o dibujos) y *simbólica* (que implica el uso de lenguajes más o menos formalizados).
- Se apoya en estrategias de comprensión, elaboración de esquemas, adquisición y uso de la información.
- Se fundamenta en un modelo heurístico de resolución de problemas.
- Tiene en cuenta determinadas variables que inciden en el desarrollo lógico-matemático.

Más que la introducción de nuevos conceptos, **¡PUES CLARO!** pretende la consolidación de aspectos ya trabajados en el ámbito académico y el desarrollo de ciertas habilidades cognitivas de atención, de memoria, de comprensión verbal y, sobre todo, de razonamiento lógico, verbal, espacial y numérico.

El programa **¡PUES CLARO!** se compone de un manual y diez cuadernos de trabajo para el alumno.

Los cuadernos están estructurados de la siguiente forma:

El **Cuaderno 1 (Nivel de introducción)**, ha sido diseñado basándose en el repertorio de habilidades necesarias para la adquisición de los contenidos lógico-matemáticos del currículo de la Educación Infantil y Ciclo I de Educación Primaria.

Posteriormente, en los **Cuadernos 2 a 6 (Nivel de desarrollo y consolidación)**, se van introduciendo progresivamente las diferentes operaciones de suma, resta, multiplicación y división, con dificultad creciente, junto a las correspondientes estrategias de resolución de problemas.

Por último, los **Cuadernos 7 a 10 (Nivel de ampliación, refuerzo y profundización)**, contribuyen al afianzamiento y profundización de los contenidos trabajados en los números anteriores, al tiempo que introducen actividades útiles para enseñar a supervisar y revisar lo ya aprendido, así como problemas de los denominados «realistas» o no rutinarios, según los diferentes autores.

Los cuadernos incorporan una serie de técnicas: moldeamiento, guía de conducta, atenuación de ayudas y refuerzo verbal positivo, a través del personaje Clarín que sirve como eje conductor.



GENERAL PARDIÑAS, 95
28006 MADRID (ESPAÑA)
TEL. 91 562 65 24
FAX 91 564 03 54
E-mail: clientes@editorialcepe.es
www.editorialcepe.es

ISBN: 978-84-7869-653-6



9 788478 696536